Rudý posuv v úloze z Fyzikální olympiády

JAN NOVOTNÝ

Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity, Brno

Příspěvek se zabývá úvahami, k nimž inspiruje zadání úlohy z Fyzikální olympiády a které nás dovádějí až k velmi hlubokým a stále aktuálním problémům. Poukazuje na rozdílné chápání pojmu „rychlost“ ve speciální teorii relativity a v relativistické kosmologii a na poučení, které z toho plyne pro zadavatele úloh.

Úvod

V 55. ročníku FO se objevila tato úloha [1]:

7. Kosmologický rudý posuv

Velikost rudého posuvu spektrálních čar ve spektrech astronomických objektů se udává číslem

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0},$$

kde λ_0 je vlnová délka ve vztažné soustavě spojené se zdrojem záření a λ vlnová délka změřená pozemským spektrometrem.

a) Jakou rychlostí v by se od nás musel vzdalovat objekt, abychom v jeho spektru změřili rudý posuv $z = 0{,}20$?

b) Za jakou dobu by takto rychle letící objekt urazil dráhu 30 kpc rovnou průměru spirálního disku naší Galaxie?

c) Nechť na daném objektu proběhly dvě soumístné události, zaregistrované přijetím signálů, které na Zem dorazily s časovým odstupem $\tau = 150$ hodin. Jakou dobu τ_0 mezi oběma událostmi by změřil pozorovatel pohybující se s daným objektem?

d) Jaká doba τ_1 uplynula mezi oběma událostmi podle pozorovatele na Zemi?

e) Porovnejte klidovou a kinetickou energii daného objektu ve vztažné soustavě spojené se Zemí.

Rozbor zadání úlohy

Na první pohled se zdá, že východiskem k řešení úlohy je zodpovězení první otázky. Určíme-li, jakou rychlostí se od nás vzdaluje objekt s daným rudým posuvem spektra, budeme již moci odpovědět na všechny další otázky na základě vztahů známých ze speciální teorie relativity. Středoškolák má k dispozici vztah pro nerelativistický Dopplerův jev a definici rudého posuvu

$$f = \left(1 - \frac{V}{c}\right) f_0, \qquad z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{f_0 - f}{f}.$$

Odtud vypočteme:

$$z = \frac{V}{c} \qquad V = 0{,}2c\,.$$

Protože zbytek zadání se týká speciální teorie relativity, vzniká otázka, zda nebylo třeba užít relativistického vztahu pro Dopplerův jev [2]

$$f = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{V}{c}\right)}{\left(1 + \frac{V}{c}\right)}}f_0 \approx \left(1 - \frac{V}{c}\right)f_0 \qquad V = cz\frac{2 + z}{2 + 2z + z^2} \approx cz$$

Pro $z = 0{,}2$ pak vyjde

$$V = 0{,}2\frac{55}{61}c = 0{,}180c \qquad V = 0{,}180c\,.$$

Rozdíl mezi nerelativistickým a relativistickým výsledkem není z hlediska přesných měření zcela zanedbatelný, a aby úloha splnila svůj účel, měl by si toho řešitel být vědom a umět ocenit nepřesnost, které se dopouští užitím nerelativistického výsledku v relativistických vztazích.

Název úlohy však vyvolává ještě další problém. Kdy je možno označit rudý posuv spojený se vzdalováním objektu za kosmologický? Patrně jen v případě, že vzdalování je působeno rozpínáním vesmíru. To je ovšem záležitost obecné teorie relativity a můžeme se pak spokojit se vzorcem užívaným ve speciální teorii relativity?

Rudý posuv v kosmologii

I. Rozpínání vesmíru je vyjádřeno vztahem

$$r = r_k R\left(t\right),$$

kde veličina r_k je vzdálenost kosmologického objektu od místa pozorování v kosmologickém čase t_k, v němž se děje pozorování, r je vzdálenost tohoto objektu v čase t, $R(t)$ se nazývá škálový faktor.

Pro $t = t_k$ klademe $R(t_k) = 1$. Z předchozího plyne

$$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = Hr \qquad H = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t},$$

což představuje Hubbleův lineární vztah mezi rychlostí v, kterou se vzdaluje kosmologický objekt, a jeho kosmologickou vzdáleností r. Koeficient H v tomto vztahu se nazývá Hubbleova konstanta. Jde ovšem o veličinu, která se s časem mění.

II. Frekvence záření f přijímaná pozorovatelem souvisí s frekvencí vysílanou kosmologickým objektem vztahem

$$f_0 R_0 = f R, \quad z = \frac{f_0 - f}{f} = \frac{R}{R_0} - 1.$$

Pro nalezení vztahu mezi z a v užijeme [3] pro nepříliš velké vzdálenosti Taylorův rozvoj a skutečnost, že na této vzdálenosti se záření vyslané objektem pohybuje přibližně rychlostí světla, takže

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -c\,.$$

Platí tedy:

$$\begin{aligned}
&R_0 = R + r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} = R + r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = R - \frac{r}{c}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\\
&\frac{R_0}{R} = \frac{1}{1+z} \approx 1 - z = 1 - \frac{r}{c}H\\
&z = \frac{r}{c}H = \frac{v}{c}
\end{aligned}$$

Vidíme, že kosmologická rychlost v se liší od rychlosti, kterou bychom určili ze speciálně relativistického Dopplerova jevu V a je v prvním přiblížení rovna rychlosti, kterou bychom určili z nerelativistického vztahu.

Milneho model Vesmíru

Dalo by se pochybovat o tom, zda má rychlost V určená ze vzorce pro Dopplerův jev v zakřiveném kosmologickém prostoročase nějaký fyzikální význam. Existuje však jednoduchý Milneho model [4], v němž je „vesmírem“ rovnoměrně se rozpínající soustava v Minkowskiho prostoročase. Jde tu o jakýsi velký třesk bez hmoty. Zde je možno bez obav použít jak „dopplerovské“ rychlosti V, tak kosmologické rychlosti v, a vzájemně je porovnat. Pro naše účely se můžeme omezit na radiální pohyb.

Interval v Minkowskiho souřadnicích T, X je

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}T^2 - \mathrm{d}X^2 \,,$$

$$X = VT \,.$$

Přechod k souřadnicím Milneho t, χ se děje podle vztahů

$$cT = ct \cosh\chi \,, \qquad X = ct \sinh\chi \,.$$

Interval v Milneho souřadnicích t, χ získáme přepočtem jako

$$\mathrm{d}s^2 = c^2(\mathrm{d}t^2 - t^2\mathrm{d}\chi^2) \,.$$

Kosmologická vzdálenost objektu je pak

$$r = ct\chi$$

a jeho kosmologická rychlost

$$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = c\chi \,.$$

V Milneho modelu platí kosmologické vztahy

$$R = \mathrm{const} \cdot t, \quad H = \frac{1}{t}.$$

Přepočtem do Milneho souřadnic dostáváme pro kosmologický objekt

$$\mathrm{tgh}\chi = \frac{V}{c}$$

a vztah mezi dopplerovskou rychlostí V a kosmologickou rychlostí v je tedy

$$V = c \ \mathrm{tgh}\frac{v}{c}, \quad v = c \ \mathrm{arctgh}\frac{V}{c}.$$

Závěr a diskuse

Vraťme se k otázce: Jakou rychlostí by se od nás musel vzdalovat objekt, abychom v jeho spektru změřili rudý posuv $z = 0{,}2$? Již jsme vypočetli, že relativistická rychlost $V = 0{,}180c$, nyní můžeme určit i kosmologickou rychlost v:

$$v = c \operatorname{arctgh} \frac{V}{c} = c \operatorname{arctgh} \frac{0{,}180c}{c} = 0{,}182c$$

I když rozdíl není velký, jeho existence nás upozorňuje na podstatnou odlišnost mezi nerelativistickou fyzikou, speciální teorií relativity a relativistickou kosmologií, co se týče zavedení pojmu rychlosti. Zamyšlení nad zdánlivě jednoduchou úlohou z FO nám umožnilo tento problém si uvědomit.

Zajímavá je otázka, zda rychlost, kterou jsme zde nazvali dopplerovskou, má fyzikální význam i v zakřiveném prostoročase. Významný relativista J. L. Synge ve své monografii odpovídá na tuto otázku kladně [5].

Dodejme ještě, že v současné době je diskutován názor opírající se o nová pozorovací data, že rozpínání vesmíru se děje způsobem blízkým Milneho modelu [6].

Kontakt: novotny@physics.muni.cz

Literatura

[1] Úloha z FO: http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/55/fo55a1_z.pdf

[2] Novotný J., Horský J., Štefaník M.: *Mechanika ve fyzice*, Academia, Praha 2002, s. 284.

[3] Landau, L. D., Lifšic, E. M.: *Teorija polja*, Nauka, Moskva 1988, s. 475.

[4] Mukhanov, V.: *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge Univ. Press, 2005, p. 27.

[5] Synge, J. L.: *Obščaja teorija otnositelnosti*, IIL, Moskva 1963. s. 113.

[6] Nielsen, J. T., Guffanti A., Sarkar S.: *Marginal Evidence for Cosmic Acceleration from Type Ia Supernovae*, Scientific Reports 6, 2016.