Experimenty s řetízky a řemeny, aneb jak jsem se naučil nedělat si starosti a mít rád motorovou pilu

PAVEL KONEČNÝ

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, Brno

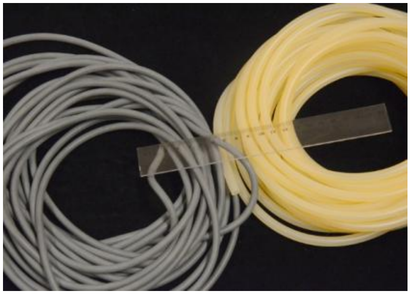
Abstrakt

Řemínky a řetězy slouží k přenosu síly, ale také například jako řezné nástroje v řetězových pilách. Za jistých okolností můžeme řemínek řetízek nebo strunu aproximovat velmi ohebným, velmi málo průtažným a velmi tenký vláknem s nějakou hmotností na metr délky. Oproti strunám mají řetízky diskrétní strukturu, ale podle konstrukce mohou být i velmi ohebné a některé tzv. kuličkové řetízky mají další stupeň volnosti. Jednotlivé články se mohou vůči sobě nejen naklápět, ale také libovolně otáčet. V některých situacích je chování řetízků, řemínků, strun, ale také dlouhých, volně zavěšených potrubí podobné, mohou se na nich například šířit příčné vlny. Porozumění mechanickému chování takových objektů má praktický význam, například otázka, jak roste síla v řemenu s otáčkami, jak se s otáčkami mění síla, kterou řemen přitahuje řemenice k sobě, co se stane, když se řemen přetrhne atd. Tento příspěvek se zabývá některými aspekty chování řemínků, které jsou uchopitelné středoškolským fyzikálním aparátem a pokusí se nabídnout jiný, doplňkový výklad podstaty příčného vlnění na struně.

Příčné vlnění na struně

Měření fázové rychlosti příčného vlnění na struně

K určení fázové rychlosti šíření příčného vlnění na struně lze použít dvě metody, jednak metodu stojatého vlnění a jednak metodu přímého měření rychlosti příčného pulzu. Obě metody jsou experimentálně nenáročné. Provazec z neopletené plné gumy o průměru kolem 6 mm a délce kolem 5–10 m při napnutí menší silou má rychlost šíření příčné vlny natolik nízkou, že se dá určit změřením doby trvání odpočítaného počtu kmitů (pro stojaté vlnění), nebo odrazů pulzu mezi úchyty (metoda přímá) ručně stopkami. Metoda stojatého vlnění nefunguje pro kmitový mód $\lambda/2$. Nejedná se totiž o kmity na struně, ale o kolébání struny, vertikální polarizace se tomto módu budí obtížně.



Obr. 1

Silná kompaktní gumová struna (na obr. 1 šedá) má nejlepší vlastnosti, ale těžko se shání. Jako náhražku lze použít tlustostěnnou silikonovou laboratorní hadicí o průměru kolem 6–8 mm. Opletená gumová lana mají velký útlum.

Je-li struna (hadice) napnutá tak, aby nebyla příliš prověšena, jsou obě (ručně provedené) metody v celkem slušné shodě.

Určení vztahu mezi fázovou rychlostí vlnění silou ve struně a její hmotnosti

Z Newtonových pohybových zákonů odvozením vlnové rovnice za předpokladu

$$\frac{\partial y(x \pm ct)}{\partial x} = \tan(\propto) \approx \sin(\propto) \approx \alpha$$

plyne, že na struně se může šířit příčné vlnění v obou směrech s fázovou rychlostí

$$c = \sqrt{\frac{F}{\sigma}}\,,$$

kde c ($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$) je fázová rychlost vlnění, F (N) síla ve struně a σ ($\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$) délková hustota hmotnosti.

Vztah pro fázovou rychlost c je obtížné odvodit elementárně, lze ho však dedukovat na základě měření c jako funkce síly F pro strunu s délkovou hustotou σ.

Měření výše uvedenými metodami je však poměrně zdlouhavé a shoda školského experimentu s teorií nevychází obvykle z celé řady praktických důvodů nejlépe.

Princip superpozice

Z linearity vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

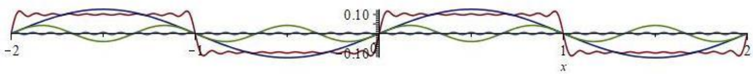
plyne princip superpozice.

Princip superpozice se týká obou směrů šíření i všech polarizací, souvisí s ním i odraz vlny na koncích struny.

Zajímavé je, že superpozicí harmonických složek, které přibližně odpovídají podmínce odvození, lze vytvořit průběh vlny, která už podmínku odvození zjevně nesplňuje. Podstata toho je patrná na následujícím ilustračním příkladu:

$$y(x) = A_0 \frac{4}{\pi} \sum_{i=1.3,5\ldots}^{21} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

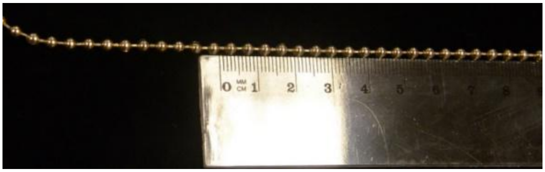
$$A_0 = \frac{1}{10}$$



Je tedy otázka, jestli není z tohoto hlediska princip superpozice limitován.

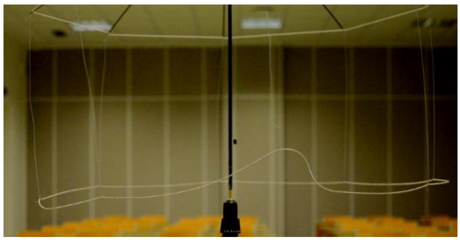
Měření rychlosti příčné vlny na kruhové horizontálně rotující struně

Spojíme-li konce jemného kuličkového řetízku (obr. 2) do smyčky a zavěsíme tenkými gumičkami na kolotoč, aby mohl rotovat v horizontální rovině (obr. 3), můžeme na něm vybudit příčnou mechanickou vlnu (obr. 4). Experimentálně zjistíme zajímavou věc, že vybuzená vlna je vůči laboratorní soustavě v klidu a to nezávisle na otáčkách kolotoče (zde i v dalším textu uvažujeme stacionární stav, nikoliv případ akcelerace nebo brzdění řetízku).



Obr. 2

Obr. 3



Obr. 4

Poznámka k experimentu

Jev můžeme interpretovat tak, že postupná vlna šířící se ve směru proti pohybu, se šíří co do velikosti stejnou rychlostí, jakou je obvodová rychlost řetízku. Vše je vztaženo k laboratorní soustavě, vůči které je kolotoč v klidu.

V tomto experimentu nemusí být nutně použit řetízek, je potřeba pouze zvolit něco, co pro danou situaci lze považovat za ideální strunu a co má mnohem větší hmotnost, než závěsní gumičky a není příliš průtažné. Při obvodové rychlosti 10m/s je síla ve struně přibližně stejná, jako v místě zavěšení svisle visící 10 m dlouhé struny. Z toho je vidět, že poloměr kruhu by v případě struny z gumy příliš závisel na otáčkách.

V celém textu tohoto článku předpokládáme, že tření v řetízku je zanedbatelné a diskrétní struktura natolik jemná, že se neprojeví.

K zavěšení kruhového řetízku jsou nejlepší gumová vlákna z gumiček do trenýrek. Vlnu je nejlépe budit bezkontaktně, například proudem vzduchu ze školního vzduchového generátoru nebo tlakovým vzduchem.

Vysvětlení pozorovaného jevu je velmi jednoduché. Plyne z porovnání výrazu pro sílu v řetízku jako funkce jeho rychlosti v a délkové hustoty σ

$$F = v^2 \cdot \sigma$$

a z výše uvedeného výrazu pro fázovou rychlost šíření příčné vlny na tomtéž řetízku

$$c = \sqrt{\frac{F}{\sigma}}\,.$$

Tedy pro stacionární stav, a pokud není žádného jiného silového působení na strunu (řetízek), mění se síla ve struně s otáčkami právě tak, že fázová rychlost příčného vlnění zůstává co do velikosti shodná s obvodovou rychlostí (vzhledem k laboratorní vztažné soustavě).

Didaktickou výhodou může být to, že výpočet síly v řetízku je uchopitelný středoškolskou fyzikou. Vychází z podmínky pro potřebnou dostředivou sílu a ze skládání sil, popřípadě z energetické úvahy (viz Apendix).

Demonstrace stability tvaru běžícího řetízku

Ve výrazu pro sílu v řetízku nefiguruje poloměr kružnice, jen obvodová rychlost a délková hustota. Nezáleží tedy na tom, jakou má řetízek ve smyčce délku ani na tom, jestli běží podél kružnice nebo nějaké jiné uzavřené křivky (pro stacionární stav a pokud nepůsobí jiné síly).

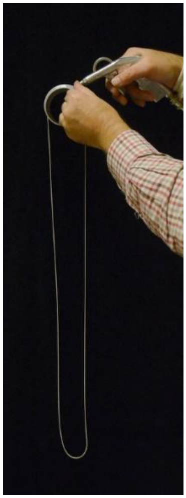
Pro experimentální ověření je třeba vyloučit vliv tíhového pole. Jediná schůdná možnost je nechat smyčku rozběhnutého řetízku padat volným pádem.

Řetízek se dá rozběhnout pomocí kladky na vrtačce, obr. 6, ale nejsnáze proudem tlakového vzduchu cca 0,2–0,8 MPa, tečně vedeného k trubce o průměru kolem 5 cm v místě řetízku (obr. 5). Z trubky se dá řetízek snadno vyhodit do vzduchu. Je-li výška vyhození cca 3 m, doba pádu řetízku $t_{\text{pádu}}$ bude

$$t_{\text{pádu}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2 \cdot \sqrt{0{,}6} \approx 1{,}5 \text{ s}.$$

Během pádu nejsou pozorovatelné žádné změny tvaru řetízku.

Neplatí tedy intuitivní představa, že by se řetízek měl odstředivou silou rychle roztáhnout do kruhu.



Obr. 5

Obr. 6

Tomu také brání zákon zachování momentu hybnosti. Velikost momentu hybnosti L řetízku běžícího ve smyčce rychlostí v podél nějaké uzavřené rovinné křivky λ je

$$L = 2vS\frac{m}{l},$$

kde m je hmotnost řetízku, l jeho délka, S je plocha vymezená v rovině řetízkem (křivkou λ).

Kinetická energie W řetízku je

$$W = \frac{1}{2}mv^2.$$

Pro volný řetízek, tedy řetízek, na který nepůsobí žádné vnější síly, se moment hybnosti $\vec{L}$ zachovává. Protože vzájemný pohyb článků vůči sobě je doprovázen třením, nezachovává se kinetická energie W. Ale pro ideální případ pohybu bez tření $v = \text{konst.}, L = \text{konst.}$, $Sv = \text{konst.}$ a tedy ke zvětšení plochy S nemůže dojít.

Plocha S se nezvětší ani v případě působení tečné odporové síly závisející pouze na obvodové rychlosti řetízku. Změna hybnosti je dána brzdnou silou, změna momentu hybnosti momentem brzdné síly a obojí je vztaženo ke stejnému bodu. Tedy mění se nejen rychlost, ale úměrně i moment hybnosti.

Pokud položíme rozběhnutý řetízek vytvarovaný do nějakého protáhlého tvaru na horizontální podložku s homogenním povrchem, zpomalí a zastaví se, aniž by se tvar nějak výrazněji změnil.

Interpretace příčné postupné vlny na struně v soustavě pohybující se rychlostí šíření vlny ve stejném směru

Shrneme-li, co již bylo uvedeno: Síla ve struně nebo řetízku, který běží podél uzavřené rovinné křivky obvodovou rychlostí v (stacionární stav), je za nepřítomnosti žádných dalších vnějších sil dána pouze délkovou hustotou σ a velikostí rychlosti v (za předpokladu, že platí aproximace ideální strunou). Nezávisí ani na velkosti ani tvaru křivky. Tedy i přímou strunu můžeme chápat jako úsek kružnice o velmi velkém poloměru. Velikost této síly a délková hustota struny určuje také fázovou rychlost c příčné vlny na ní. Z příslušných vztahů plyne, že tato rychlost je co do velikosti stejná, jako obvodová rychlost $c = v$. Postupuje-li vlna v opačném směru, než je pohyb struny, je vůči laboratorní soustavě v klidu.

Příčné postupné vlnění na struně v jednom směru můžeme tedy interpretovat jako pohyb této struny podél křivky mající tvar daného vlnění a to pohyb s fázovou rychlostí příčného vlnění.

K tomu je potřeba přejít ze soustavy, ve které byla struna před vybuzením vlnění v klidu, do soustavy pohybující se rychlostí c ve směru šíření vlnění.

Tento přístup má určitou výhodu v tom, že matematický aparát k jeho pochopení je středoškolské povahy, na rozdíl od vlnové rovnice a experiment je velmi zřejmý a časově úsporný.

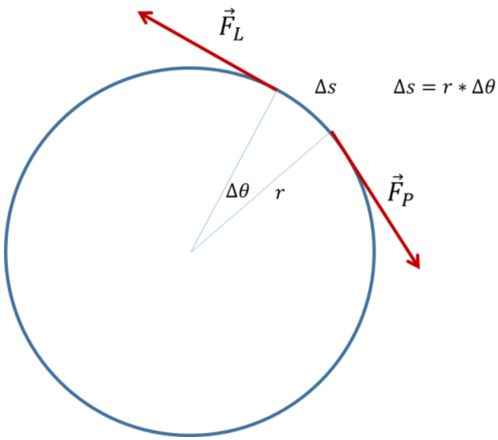
Zdálo by se také, že je touto úvahou vysvětlen paradox zmíněný v úvodu, totiž, že existuje konflikt mezi principem superpozice a podmínkou na malou strmost vlny. Například podmínce odvození vlnové rovnice zjevně nevyhovující téměř pravoúhlý signál lze poskládat z harmonických složek dobře odpovídajících podmínce odvození. V chápání postupné (téměř pravoúhlé) vlny jako struny běžící rychlostí c podél křivky ve tvaru této (téměř pravoúhlé) křivky žádný konflikt není, pokud je struna dostatečně tenká a ohebná.

Na druhou stranu, tato interpretace postupné vlny je v rozporu s principem superpozice, protože ji nelze použít současně pro oba směry vlnění, tím pádem i pro odraz a interferenci, stojaté vlnění a podobně, takže je třeba brát ji s rezervou.

Závěr

Síla F ve smyčce řetízku nebo řemínku roste se čtvercem obvodové rychlosti a je přímo úměrná jeho délkové hustotě. V dané aproximaci tato síla nezávisí na poloměru kladek, přes které je veden a podobně. Tvar běžícího řetízku, pokud na něj nepůsobí vnější síly, je poměrně stabilní za předpokladu, že řetízek nebo řemínek je dobře aproximovatelný ideální strunou. Příčnou postupnou vlnu v podobě malé poruchy na struně můžeme chápat jako v jiné soustavě pozorovanou tutéž strunu běžící rychlostí šíření vlnění podél křivky ve tvaru této vlny (poruchy).

Apendix



Odvození síly F v běžícím řetízku rychlostí v po kružnici

Na element řetízku Δs musí působit od něj pokračující části řetízku takovými silami $\vec{F}_L, \vec{F}_P$, aby jejich výslednice udělovala elementu řetízku Δs o hmotnosti $\Delta s \cdot \sigma$ odpovídající zrychlení pohybu rychlostí v po kružnici o poloměru r:

$$\left|\vec{F}_L\right| = \left|\vec{F}_P\right| = F,$$

$$\left|\vec{F}_L + \vec{F}_P\right| \approx F \cdot \Delta\theta = (\sigma \cdot r \cdot \Delta\theta)\frac{v^2}{r},$$

$$F = \sigma v^2.$$